

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2020/01

Introdução ao Curso

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução - O que é “lógica” ?

- Vamos abrir o curso de Introdução à Lógica Computacional com uma pergunta:

O que é “lógica” ?

Algumas definições (mais ou menos) formais incluem:

- *“A lógica (do grego antigo λογική) é o método de raciocínio conduzido ou avaliado de acordo com princípios estritos de validade.”*
- *“A lógica é o estudo sistemático das formas de inferência válidas, e das leis gerais da verdade.”*
- *“A lógica é o uso sistemático de técnicas matemáticas e simbólicas para determinar as formas de argumento dedutivo válido.”*
- ...

Introdução - O que é “lógica”?

- Nas definições acima, alguns termos merecem destaque:
 - “raciocínio”,
 - “verdade” e “validade”,
 - “formas de inferência” e “argumento dedutivo”,
 - “técnicas matemáticas e simbólicas”, e
 - “princípios estritos”, “estudo sistemático” e “leis gerais”.
- Neste curso vamos estudar cada um destes termos com o devido cuidado...
- Mas, no momento, é suficiente dizer que a intuição de “lógica” pode ser capturada informalmente como:

“A lógica é o método de raciocinar corretamente.”

Basicamente, é isso que vamos fazer neste curso: aprender a raciocinar corretamente, com especial atenção à computação!

Objetivos e Programa da Disciplina

ILC: Objetivos

- Ao final deste curso, espera-se que o(a) estudante seja capaz de responder com propriedade as seguintes perguntas:
 1. O que é a **lógica proposicional**, e como aplicá-la a problemas reais?
 2. O que é a **lógica de predicados**, e como aplicá-la a problemas reais?
 3. A partir de um conjunto de hipóteses, como realizar apenas **deduções válidas**?
 4. Como **demonstrar formalmente a veracidade** de uma proposição matemática?
 5. O que é o **conceito de recursão**, e como aplicá-lo a problemas reais?
 6. Como a **lógica Booleana** é aplicada à base dos **circuitos digitais** que compõem os **computadores modernos**?

1. Fundamentos das lógicas proposicional e de predicados.

- a) Conectivos lógicos (conjunção, disjunções inclusiva e exclusiva, negação, implicação, implicação dupla).
- b) Tabelas da verdade.
- c) Satisfatibilidade, tautologias, contradições.
- d) Consequência lógica, equivalência lógica.
- e) Predicados, quantificadores, e proposições quantificadas.
- f) Regras de inferência.
- g) Expressividade das lógicas proposicional e de predicados.

2. Métodos de demonstração.

- a) Demonstração direta, por contra-exemplo e por divisão em casos.
- b) Demonstração por contradição e por implicação contra-positiva.
- c) Demonstrações construtivas e não-construtivas.

3. Teoria de conjuntos e funções.

- a) Conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais.
- b) Teoria de conjuntos elementar.
- c) Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.
- d) Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis.
- e) Somatórios e produtórios.

4. Indução e recursão.

- a) Indução matemática fraca e forte.
- b) Princípio da boa ordenação.
- c) Relações de recorrência e recursão.
- d) Indução estrutural.

5. Fundamentos de álgebra Booleana e circuitos digitais combinatórios.

- a) Conversão entre bases numéricas.
- b) Álgebra Booleana e aritmética binária (incluindo leis de De Morgan e representação em complemento de dois).
- c) Portas lógicas.
- d) Formas normais conjuntiva e disjuntiva.
- e) Minimização de circuitos e mapas de Karnaugh.
- f) Completude de operadores.

Um exemplo de uso de lógica: Definindo números

O papel da lógica na definição de números

- Começamos com uma motivação natural para a lógica: definir os números.
- Definir números rigorosamente é essencial.

Computadores, por exemplo, manipulam números o tempo todo, e não contam (ainda) com a capacidade de “entendê-los intuitivamente”.

Tudo precisa ser rigorosamente definido para computadores funcionarem bem.

- Porém, quando os matemáticos tentaram definir rigorosamente o conceito de “número”, muitas dificuldades surgiram.
 - 1 Como conseguir uma definição finita para um conjunto infinito (como o conjunto dos números naturais, ou o dos números reais)?
 - 2 Como demonstrar que sua definição está correta: que nenhum número “errado” está incluído nela, e que nenhum número “certo” está excluído?
- Para resolver estas dificuldades, muitas técnicas lógicas foram aprimoradas.

O papel da lógica na definição de números

- Aqui definiremos conjuntos de números importantes:
 - os números naturais \mathbb{N} ,
 - os números inteiros \mathbb{Z} ,
 - os números racionais \mathbb{Q} ,
 - os números irracionais \mathbb{I} , e
 - os números reais \mathbb{R} .
- Para isto, vamos usar vários conceitos que veremos com cuidado neste curso:
 - conectivos lógicos para definir conjuntos,
 - definições recursivas,
 - uso de bases diferentes (decimal, binária) para representar números,
 - como representar somas com infinitos termos (somatórios), e
 - como demonstrar a veracidade de uma afirmação matemática.

Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Alguns autores não consideram o número 0 (zero) como um número natural, definindo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

- O conjunto dos números naturais \mathbb{N} pode ser definido através de duas “observações auto-evidentes”:

N_1 : 0 (zero) é um número natural, e

N_2 : cada número natural tem um sucessor.

Os números naturais

- Reescrevendo estas “observações auto-evidentes” de maneira mais formal, obtemos os seguintes **axiomas** para os naturais:

$$N_1': 0 \in \mathbb{N}, \text{ e}$$

$$N_2': \text{ se } k \in \mathbb{N}, \text{ então } s(k) \in \mathbb{N},$$

onde $s(\cdot)$ é a **função sucessor**: $s(k) = k + 1$.

- Exemplos:
 - $0 \in \mathbb{N}$, por causa de (N_1') .
 - $s(0) \in \mathbb{N}$, por causa de (N_2') . Notação: $s(0) = 1$.
 - $s(s(s(s(s(0)))))) = 5 \in \mathbb{N}$.
- Para obter-se o número natural n , aplica-se (N_1') uma vez, e depois aplica-se (N_2') n vezes.

Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

- Exemplo 1

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$



Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

- Exemplo 1

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Entretanto, não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor os números naturais.

Podemos representar os números naturais em potências de 2, por exemplo.

- Exemplo 2

$$\begin{aligned} 11101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 237 \end{aligned}$$

Os números inteiros

- O conjunto dos **números inteiros** é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

é o conjunto dos **números inteiros positivos**.

- O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} pode ser definido como sendo o conjunto de todos os números naturais e seus negativos:

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ou } -x \in \mathbb{N}\}.$$

Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais** \mathbb{R} .

- Exemplos:

① $\pi = 3.14159265359 \dots$

③ 2

② $\sqrt{2} = 1.41421356237 \dots$

④ -4.5

- Um **número real** pode ser definido como uma soma ponderada infinita de potências de 10:

$$d_k \ d_{k-1} \ \dots \ d_1 \ d_0 \ . \ d_{-1} \ d_{-2} \ d_{-3} \ \dots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} \pi &= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \dots \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \dots \end{aligned}$$



Os números racionais

- O próximo conjunto de interesse é o dos **números racionais** \mathbb{Q} .
- Um número **racional** é um número real x tal que existam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que

$$x = \frac{p}{q}.$$

Note sempre podemos usar a **representação simplificada** de racional, em que $\text{mdc}(p, q) = 1$.

- Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad \frac{17}{34} = \frac{-9}{-18} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} = -0.333333\dots$$

- **Teorema.** Um número real é racional se, e somente se, há periodicidade na sua representação decimal.

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad 1/5 = 0.20000000\dots$$

$$\textcircled{2} \quad 1/7 = 0.142857142857\dots$$

Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-rationais:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional (ou seja, um número real que não pode ser escrito como fração de inteiros).
- **Teorema.** $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração.

Por contradição. Suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional.

Neste caso, sabemos que existem números $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Elevando os dois lados da equação acima ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$.

- **Demonstração (Continuação).**

Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $r \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2r$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, o que resulta em $q^2 = 2r^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $r \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2r$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, o que resulta em $q^2 = 2r^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $\text{mdc}(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

Conclusão: não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$, portanto $\sqrt{2}$ não é racional.



Observações sobre os números racionais e irracionais

- Alguns fatos interessantes sobre racionais e irracionais:
 - a) O conjunto dos números reais é a união dos racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
 - b) Entre dois números racionais quaisquer sempre existe um número irracional.
 - c) Entre dois números irracionais quaisquer sempre existe um número racional.
 - d) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
 - e) A soma de um racional e um irracional é sempre um número irracional.
 - f) A soma de dois números irracionais é mais complicada: não se sabe se o número $\pi + e$, onde e é a constante de Euler, é racional ou irracional!

Uma última questão “complicada”

- Vamos fechar com uma questão mais “complicada” sobre os números. A seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa?

“O conjunto \mathbb{Z} dos inteiros é “maior” que o conjunto \mathbb{N} dos naturais.”

Há duas possibilidades:

- Se a afirmação for verdadeira, então existe um infinito “maior” que o outro!
- Mas se ela for falsa, então é possível um conjunto ter o mesmo “tamanho” que de um de seus subconjuntos próprios (ou seja, \mathbb{Z} ter o mesmo “tamanho” que seu subconjunto próprio \mathbb{N})!

Dilemas como este, em que nossa intuição não é de muita ajuda, dependem de métodos lógicos cuidadosos para serem resolvidos.

Neste curso vamos resolver esta e muitas outras questões, e para isso vamos começar a estudar a lógica a fundo na próxima aula!