DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2020/01

Estruturas Básicas: Conjuntos, Funções, Sequências, e Somatórios

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Estruturas Básicas: Introdução

- Aqui vamos estudar algumas estruturas básicas da matemática discreta:
  - conjuntos,
  - funções,
  - sequências,
  - somatórios e produtórios.

Conjuntos

Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.

- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.

  Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.

- Os conceitos que estudaremos aqui são essenciais para diversas áreas, incluindo algumas que estudaremos neste curso:

  - funções,
  - sequências,
  - somatórios e produtórios,
  - análise combinatória,
  - relações.
  - ...

Conjuntos

- Um **conjunto** é coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

  Escrevemos
  $$a \in A$$
  para denotar que o elemento a pertence ao conjunto A.

  Escrevemos
  $$a \notin A$$
  para denotar que o elemento a não pertence ao conjunto A.

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Formas de se definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:

  1. $A = \{\texttt{Ana}, \texttt{Bia}, \texttt{Carlos}\}$
  2. $B = \{a, e, i, o, u\}$
  3. $C = \{\texttt{Júpiter}, 2, \pi, \texttt{Ana}\}$
  4. $D = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

- Especificar uma propriedade que define um conjunto:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

  significa que o conjunto S consiste em todos os elementos x que tornem o predicado $P(x)$ verdadeiro.

  1. $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
  2. $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$
  3. $G = \{x \mid \text{a pessoa } x \text{ mora no Brasil}\}$

Formas de se definir um conjunto

- Usar uma definição recursiva:

  1. O conjunto

$$H = \begin{cases} 1 \in H, \\ \text{se } x \in H \text{ e } x + 2 \leq 10, \text{ então } x + 2 \in H. \end{cases}$$

  é o conjunto

$$H = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(Vamos estudar definições recursivas com muito mais cuidado mais à frente neste curso.)

Formas de se definir um conjunto

- Especificar uma função característica, que retorna 1 para todo elemento que pertence ao conjunto e 0 em caso contrário:
  1. A função característica

     $$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

     define o conjunto dos números naturais primos.

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:
  1. Não é possível definir o conjunto

     $$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

     listando todos os seus elementos.

     (Vamos demonstrar isso mais à frente neste curso.)

Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:
  1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ é o conjunto dos **números naturais**.
  2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ é o conjunto dos **números inteiros**.
  3. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$ é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
  4. $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais**.
  5. $\mathbb{R}$ é o conjunto dos **números reais**.
  6. $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos **números reais positivos**.
  7. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos **números complexos**.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos.

  Formalmente, para todos conjuntos A e B,

  $$A = B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \ \leftrightarrow \ x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:
    1. $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:
    1. $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

Subconjuntos

- Um conjunto A é chamado **subconjunto** de um conjunto B sse cada elemento de A também é um elemento de B.

  Usamos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B.

  Formalmente:
  $$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \ \rightarrow \ x \in B).$$

- As frases "A **está contido** em B" e "B **contém** A" são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

  1. O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
  2. O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)
  3. O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

Subconjuntos próprios

- Um conjunto A é **subconjunto próprio** de um conjunto B sse cada elemento de A está em B e existe pelo menos um elemento de B que não está em A.

  Formalmente:

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\equiv \quad \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \land \quad \exists x : (x \in B \land x \notin A) \\ &\equiv \quad A \subseteq B \quad \land \quad A \neq B. \end{aligned}$$

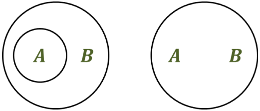
1. O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.

2. O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

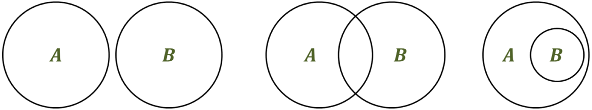
Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ $A \subseteq B$.



- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ $A \not\subseteq B$.



- <u>Diagramas de Venn não podem ser usados como demonstração!</u>

O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos.

  Denotamos o conjunto vazio por $\{\}$ ou $\emptyset$.

- Note que $\{\emptyset\}$ não denota o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.

- **Teorema**: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

  Demonstração. Seja A um conjunto qualquer. Queremos mostrar que $\emptyset \subseteq A$, o que equivale a mostrar que

  $$\forall x : (x \in \emptyset \ \rightarrow \ x \in A) \ .$$

  Mas a condicional universal acima é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

  Logo $\emptyset \subseteq A$. □

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

  a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: $\emptyset$ não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
  c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
  d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
  e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.
  f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de $\mathbb{N}$.
  g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.
  h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.
  i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto $\mathbb{N}$ não é um elemento de $\mathbb{Z}$.
  j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$: Verdadeiro: o conjunto $\mathbb{N}$ é um suconjunto de $\mathbb{Z}$.

Conjunto potência

- Dado um conjunto A, o **conjunto potência de** A é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

  Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto potência de A.

- Exemplos:

  1. Dado o conjunto $S = \{x, y, z\}$, seu conjunto potência é
     $$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$
  2. Dado o conjunto vazio $\emptyset$, seu conjunto potência é
     $$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$
  3. Dado o conjunto $\{\emptyset\}$, seu conjunto potência é
     $$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

  Demonstração. Para formar um subconjunto S qualquer de A, podemos percorrer cada elemento $a_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$, decidindo se $a_i \in S$ ou se $a_i \notin S$.

  Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de n elementos em A, há 2^n maneiras de se formar um subconjunto S de A.

  Logo, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. $\square$

Tuplas ordenadas

- Uma n-**tupla ordenada** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma coleção ordenada de n elementos, em que a_1 é o primeiro elemento, a_2 é o segundo elemento, ..., e a_n é o n-ésimo elemento.
- Algumas n-tuplas ordenadas recebem nomes especiais:
  - Uma 2-tupla ordenada é chamada de **par ordenado**.
  - Uma 3-tupla ordenada é chamada de **tripla ordenada**.
  - Uma 4-tupla ordenada é chamada de **quádrupla ordenada**.
  - ...
- Duas n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são **iguais** sse

$$x_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots n.$$

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

  Formalmente:

  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

  $$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

  $$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

  $$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

  Note, em geral, que $A \times B \neq B \times A$.

Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos.
- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos.

  O **produto cartesiano** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

  é o conjunto de todas n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \ldots n$.

  Formalmente:

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \ldots n\}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\gamma, \delta\}$.

  $$\begin{aligned} A \times B \times C \ = \ & \{(0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta), \\ & (1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta)\} \end{aligned}$$

O tamanho de conjuntos finitos

- Seja A um conjunto finito contendo exatamente n elementos distintos.

  Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de A é n.

  A notação $|A| = n$ indica que o tamanho de A é n elementos.

- Estudaremos a cardinalidade de conjuntos infinitos mais adiante.

Operações em conjuntos

Operações em conjuntos: Introdução

- Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diferentes maneiras.

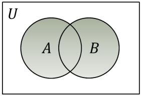
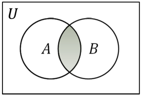
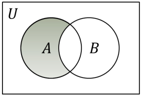
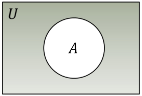
  Por exemplo, dados o conjunto de estudantes de Lógica Computacional e o conjunto de pessoas nascidas em Minas Gerais, podemos definir:

  1. o conjunto de mineiros que estudam Lógica Computacional,
  2. o conjunto de pessoas que são mineiras ou estudam Lógica Computacional,
  3. o conjunto de estudantes de Lógica Computacional que não são mineiros,
  4. ...

- Aqui estudaremos **operações em conjuntos** que permitem a criação de conjuntos mais complexos a partir de conjuntos mais simples.

Operações em conjuntos

- Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo U:

União:	$A \cup B \quad = \quad \{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$	
Alternativamente:	$x \in A \cup B \quad \leftrightarrow \quad x \in A \ \vee \ x \in B$	
Notação:	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad = \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$	
Interseção:	$A \cap B \quad = \quad \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$	
Alternativamente:	$x \in A \cap B \quad \leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \in B$	
Notação:	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad = \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$	
Diferença:	$A - B \quad = \quad \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$	
Alternativamente:	$x \in A - B \quad \leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \notin B$	
Complemento:	$\overline{A} \quad = \quad \{x \in U \mid x \notin A\}$	
Alternativamente:	$x \in \overline{A} \quad \leftrightarrow \quad x \notin A$	

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

  Considere como conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

  - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $A \cap B = \{1, 5\}$
  - $A - B = \{3, 4\}$
  - $B - A = \{2, 6\}$
  - $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7\}$
  - $\overline{B} = \{0, 3, 4, 7\}$

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Determine:

a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Solução.

Primeiro, vamos entender quem é cada conjunto A_i com alguns exemplos.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{0, 1\} \\
A_2 &= \{0, 1, 2\} \\
A_3 &= \{0, 1, 2, 3\} \\
\ldots &= \ldots \\
A_{10} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}
\end{aligned}$$

Operações em conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Agora podemos verificar o seguinte.

a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Para ver o porquê, note que $0 \in A_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, logo o número 0 deve estar na união desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n temos que $n \in A_n$, logo n também deve estar na união desejada.

Assim temos que a união deseja inclui 0 e todos os inteiros positivos, logo esta união é o próprio conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais.

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0, 1\}$

Para ver o porquê, note que, por definição, $0 \in A_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, logo o número 0 deve estar na interseção desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n, com $n > 1$, temos que $n \notin A_{n-1}$, logo n não pode estar na interseção desejada.

Assim temos que a interseção desejada inclui 0 e 1, mas não inclui nenhum inteiro positivo maior do que 1, logo esta interseção é o conjunto $\{0, 1\}$.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A está em B, e cada elemento de B está em A.

- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

  Formalmente:

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

  Teorema: $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

  Demonstração. Escrevendo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ formalmente:

$$\begin{aligned}
& A = B \\
\equiv \quad & \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B) && \text{(definição de igualdade)} \\
\equiv \quad & \forall x : ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) && \text{(definição de } \leftrightarrow\text{)} \\
\equiv \quad & (\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x : (x \in B \rightarrow x \in A)) && \text{(distributividade de } \forall \text{ sobre } \wedge\text{)} \\
\equiv \quad & A \subseteq B \wedge B \subseteq A && \text{(definição de } \subseteq\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

Igualdade de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Mostre que $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solução.

- Método 1: Manipulando a definição dos operadores em conjuntos.

  Vamos mostrar que $x \in \overline{(A \cap B)}$ sse $x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$:

$$
\begin{array}{rcll}
x \in \overline{(A \cap B)} & \leftrightarrow & x \notin (A \cap B) & \text{(definição de complemento)} \\
& \leftrightarrow & \neg(x \in (A \cap B)) & \text{(definição de } \notin\text{)} \\
& \leftrightarrow & \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) & \text{(definição de interseção)} \\
& \leftrightarrow & \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) & \text{(de Morgan)} \\
& \leftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) & \text{(definição de } \notin\text{)} \\
& \leftrightarrow & (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) & \text{(definição de complemento)} \\
& \leftrightarrow & x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) & \text{(definição de união)}
\end{array}
$$

Igualdade de conjuntos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

  - Método 2: Usando uma **tabela de pertinência**, em que usamos o símbolo 1 para indicar que um elemento pertence a um conjunto, e o símbolo 0 para indicar que ele não pertence.

    A tabela abaixo demonstra que um elemento pertence a $\overline{(A \cap B)}$ (quarta coluna) sse ele pertence a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (sexta coluna):

A	B	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universo U.

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com $\emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
União e interseção com o complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Complementos de U e $\emptyset$	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$

Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

  Formalmente:
  $$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \quad \equiv \quad A \cap B = \emptyset.$$

- **Proposição:** Dados dois conjuntos A e B, $(A - B)$ e B são disjuntos.

  Demonstração. Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos A e B tais que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$. Neste caso existe um elemento x tal que $x \in (A - B) \wedge x \in B$. Note que, em particular, isso significa que $x \in B$.

  Por outro lado, também teremos $x \in (A - B)$, o que, pela definição de diferença, significa que $x \in A \wedge x \notin B$. Em particular, isso implica que $x \notin B$.

  Logo chegamos a uma contradição, uma vez que $x \in B$ e $x \notin B$. Portanto, a proposição deve ser verdadeira. $\square$

Partições de um conjunto

- Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$.

- Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ é uma **partição** do conjunto A sse
  (i) $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, e
  (ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos.

- Exemplo 9 Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, algumas partições possíveis são:
  a) $\{\{2, 3, 5\}, \{1, 4\}\}$,
  b) $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3\}\}$,
  c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$, e
  d) $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

- Exemplo 10 $\mathbb{Z}$ pode ser particionado entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos "Ingênua"

O Paradoxo do Barbeiro

- Vimos que um conjunto pode ser especificado através de uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:

  1. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
  2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$

- Entretanto, a propriedade $P(x)$ não pode ser uma propriedade qualquer.

- **Paradoxo do Barbeiro:** *"O barbeiro é alguém que barbeia todos aqueles, e apenas aqueles, homens que não se barbeiam sozinhos."*

  A pergunta é: o barbeiro barbeia a si mesmo?

  Equivalentemente, seja b o barbeiro e seja B o conjunto de todas as pessoas que o barbeiro b barbeia. Então:

  $$b \in B?$$

  Paradoxo: $b \in B \leftrightarrow b \notin B$!

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos "Ingênua"

- O Paradoxo do Barbeiro é um caso especial do problema identificado por Bertrand Russell:

  Paradoxo de Russell: Se definirmos S como *"o conjunto de todos os conjuntos que não têm a si mesmo como elemento"*, ou seja,

  $$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto e } A \notin A\},$$

  como decidir se $S \in S$?

  Paradoxo: $S \in S \leftrightarrow S \notin S$!

- Lições:
  - Teoria de Conjuntos "Ingênua" (*"Naïve set theory"*) não pode ser usada sem cuidado.
  - Para isso existem **abordagens axiomáticas**, como a de Zermelo-Fraenkel (*"ZF Set Theory"*).

Funções

Funções: Introdução

- Frequentemente temos que atribuir a cada elemento de um conjunto um elemento particular de outro conjunto.

  Por exemplo, podemos:

  1. Atribuir a cada aluno de Introdução à Lógica Computacional uma nota.
  2. Atribuir a cada inteiro seu quadrado.
  3. Atribuir a cada país seu chefe de Estado.

- O conceito de **função** formaliza este tipo de atribuição.

- Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:

  - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
  - no estudo de complexidade de algoritmos,
  - na produção de algoritmos recursivos,
  - ...

Funções

- Sejam A e B conjuntos não-vazios.

  Uma **função** f de A para B é uma atribuição de exatamente um elemento de B a cada elemento de A.

  Escrevemos

  $$f(a) = b$$

  se b for o único elemento de B atribuido através de f ao elemento a de A.

Funções

- Se f é uma função de A para B, escrevemos

$$f : A \to B$$

para denotar o **tipo** da função.

O conjunto A é chamado de **domínio** de f.

O conjunto B é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de f.

A **imagem** de f é o conjunto de valores que f pode assumir:

$$\text{imagem de } f \; = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

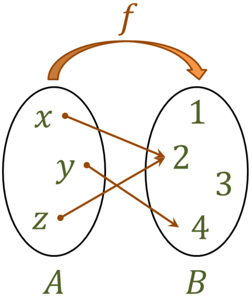
A **imagem inversa** de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ que são mapeados a b via f:

$$\text{imagem inversa de } b \; = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Funções: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

  Seja a função $f : A \to B$ definida pelo diagrama abaixo.



- Domínio de f: $\{x, y, z\}$
- Co-domínio de f: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem de f: $\{2, 4\}$

- $f(x) = 2$
- $f(y) = 4$
- $f(z) = 2$

- Imagem inversa de 1: $\emptyset$
- Imagem inversa de 2: $\{x, z\}$
- Imagem inversa de 3: $\emptyset$
- Imagem inversa de 4: $\{y\}$

- A função f pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$

Funções: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Outros exemplos de funções:

  - Função quadrado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

  $$f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto x^2$$

  - Função sucessor $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

  $$f(n) = n + 1 \quad \text{ou} \quad f : n \mapsto n + 1$$

  - Função constante $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$:

  $$f(r) = 2 \quad \text{ou} \quad f : r \mapsto 2$$

  - Função líder $f : P \to H$, onde P é o conjunto de todos os países, I é o conjunto de indivíduos humanos, e

  $$f : p \mapsto c, \qquad \text{onde } c \text{ é o chefe de Estado do país } p.$$

Igualdade de funções

- Duas funções f e g funções são **iguais** sse elas:
  - têm o mesmo domínio
  - têm o mesmo co-domínio
  - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

  Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \to B$:

$$f = g \qquad \text{sse} \qquad \forall a \in A \; : \; f(a) = g(a).$$

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Sejam as funções definidas dos reais para os reais não-negativos:

$$f(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

  Então $f = g$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Função injetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \neq a_2 \quad \to \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \to \quad a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

  - $f(x) = x + 1$
    é injetiva;
  - $f(x) = x/10$
    é injetiva;
  - $f(x) = x^2$
    não é injetiva;

Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo $b \in B$ é possível achar um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.
- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:
  - $f(x) = x + 1$ <u>é sobrejetiva</u>;
  - $f(x) = x/10$ <u>é sobrejetiva</u>;
  - $f(x) = x^2$ <u>não é sobrejetiva</u>;

Função bijetiva

- Uma função $f : A \to B$ é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse f é injetiva e sobrejetiva.

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

  - $f(x) = x + 1$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

  - $f(x) = {}^{x}/_{10}$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;

  - $f(x) = 2^x$ não é bijetiva (é injetiva mas não é sobrejetiva);

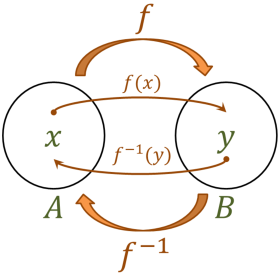
  - $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ não é bijetiva (é sobrejetiva mas não é injetiva).

Função inversa

- Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva.

  A **função inversa** de f é $f^{-1} : B \to A$ tal que

  $$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$



- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

  $$f^{-1}(x) = x - 1$$

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é invertível porque ela não é bijetiva: $f(2) = f(-2) = 4$, logo $f^{-1}(4)$ não é definido.

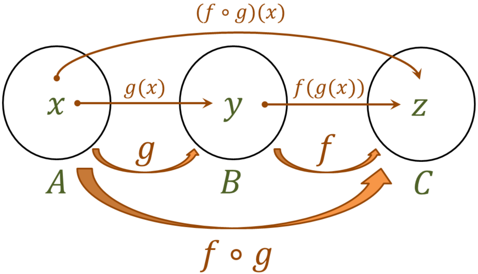
Composição de funções

- Sejam $g : A \to B'$ e $f : B \to C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f, i.e., $B' \subseteq B$.

  A **função composta** de f com g, denotada por $f \circ g : A \to C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

  A função $f \circ g$ é chamada de **composição de f e g**.



Composição de funções

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \qquad \text{e} \qquad g(n) = n^2.$$

É verdade que $f \circ g = g \circ f$?

Solução. $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

Logo $f \circ g \neq g \circ f$.

- O exemplo acima mostra que <u>a composição de funções não é comutativa.</u>

Composição com a função identidade

- Dado um domínio A, a **função identidade** $\iota_A : A \to A$ é definida como:

$$\iota_A(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

- **Teorema.** Se f é uma função de X para Y, e ι_X é a função identidade em X e ι_Y é a função identidade em Y, então

$$f \circ \iota_X = f$$
$$\iota_Y \circ f = f$$

  Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

- **Teorema.** Se $f : X \to Y$ uma função bijetiva com função inversa $f^{-1} : Y \to X$, então

$$f^{-1} \circ f = \iota_X$$
$$f \circ f^{-1} = \iota_Y$$

  Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

Funções importantes: Função piso e função teto

- A função **piso** ou **chão** (em inglês, *floor*) atribui a cada número real x o maior número inteiro menor ou igual a ele.

  O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

- A função **teto** (em inglês, *ceiling*) atribui a cada número real x o menor número inteiro maior ou igual a ele.

  O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$.

- Tanto a função piso quanto a função teto têm tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$:

  - $$\begin{aligned} \lfloor \pi \rfloor &= 3 \\ \lceil \pi \rceil &= 4 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} \lfloor -2.7 \rfloor &= -3 \\ \lceil -2.7 \rceil &= -2 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} \lfloor 42 \rfloor &= 42 \\ \lceil 42 \rceil &= 42 \end{aligned}$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- Algumas propriedades úteis das funções piso e teto:

  1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
  2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
  3. $x - 1 \quad < \quad \lfloor x \rfloor \quad \leq \quad x \quad \leq \quad \lceil x \rceil \quad < \quad x + 1$

- Para provar propriedades sobre funções piso e teto, é útil observar que:

$$x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon \qquad \text{, para algum } 0 \leq \varepsilon < 1,$$
$$x = \lceil x \rceil - \varepsilon \qquad \text{, para algum } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Vamos demonstrar a propriedade de que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

  Demonstração. Vamos representar o número x como $n + \epsilon$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \epsilon < 1$.

  Há dois casos a se considerar, dependendo se $\epsilon = 0$ ou não.

  <u>Caso 1:</u> $\epsilon = 0$. Neste caso $x = n$ e $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$.

  <u>Caso 2:</u> $0 < \epsilon < 1$. Primeiramente, note que

  $$\begin{aligned} \lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \epsilon) \rfloor && \text{(pois } x = n + \epsilon\text{)} \\ &= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função piso),} \end{aligned}$$

  e que

  $$\begin{aligned} -\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil && \text{(pois } x = n + \epsilon\text{)} \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função teto),} \end{aligned}$$

  de onde concluímos que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

  $\square$

Funções parciais

- Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B atribui a cada elemento a em um subconjunto de A, chamado de **domínio de definição de** f, um único elemento b de B.

  Os conjuntos A e B são chamados de **domínio** e **co-domínio** de f, respectivamente.

  Dizemos que f é **indefinida** para elementos de A que não estão no domínio de definição de f.

  Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A, dizemos que f é uma **função total**.

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ onde $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{R}$ em que o domínio da definição é o conjunto dos inteiros não-negativos.

  A função f é indefinida para os inteiros negativos.

Sequências

Sequências: Introdução

- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
- Sequências são estruturas discretas que aparecem com frequência em ciência da computação:
  1. progressão aritmética,
  2. progressão geométrica,
  3. strings,
  4. ...
- Nesta seção vamos estudar como definir sequências, e como encontrar regras para geração de sequências.

Sequências

- Uma sequência é uma estrutura utilizada para representar uma lista ordenada.

  Formalmente, uma **sequência** é uma função definida de um subconjunto dos inteiros para um conjunto arbitrário S.

  Normalmente o domínio de uma sequência são os naturais ou os inteiros positivos, mas qualquer subconjunto dos inteiros pode ser usado como domínio.

- Usamos a_n para denotar a imagem do inteiro n.

  Cada a_n é chamado de um **termo** da sequência.

  A sequência como um todo é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

- Exemplos:

  1. A sequência (infinita) dos números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$
  2. A sequência (infinita) de $1/n$, para n inteiro positivo: $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots$
  3. A sequência (finita) de dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado.

Sequências importantes

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência da forma

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad \dots \quad , \quad a+nd, \quad \dots$$

onde o **termo inicial** a e a **diferença comum** d são números reais.

- Exemplo 23 A sequência $\{a_n\}$ com

$$a_n = -1 + 4n$$

é uma progressão aritmética com:

  - termo inicial: -1
  - diferença comum: 4

Seus termos iniciais $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ são:

$$-1, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad \dots$$

Sequências importantes

- Uma **progressão geométrica** é uma sequência da forma

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \ldots \quad , \quad ar^n, \quad \ldots$$

onde o **termo inicial** a e a **razão** r são números reais.

- $\boxed{\text{Exemplo 24}}$ A sequência $\{g_n\}$ com

$$g_n = 6 \cdot (1/3)^n$$

é uma progressão geométrica com:

  - termo inicial: 6
  - razão: $1/3$

Seus termos iniciais $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \ldots$ são:

$$6, \quad 2, \quad 2/3, \quad 2/9, \quad 2/27, \quad 2/81, \quad \ldots$$

Fórmulas explícitas para sequências

- Uma **fórmula explícita** define como obter o n-ésimo termo de uma sequência diretamente em função de n.

  Uma mesma sequência pode ser definida por mais de uma fórmula explícita.

- Exemplo 25 A sequência

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots \quad , \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \dots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais:

$$0 \mapsto 1 \qquad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \qquad 2 \mapsto \frac{1}{3} \qquad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \qquad \dots \qquad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \dots$$

Formalmente, a sequêcia pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Fórmulas explícitas para sequências

- $\boxed{\text{Exemplo 25}}$ (Continuação)

  A mesma sequência pode ser definida como uma função função dos inteiros positivos para os reais:

  $$1 \mapsto 1 \qquad 2 \mapsto -\frac{1}{2} \qquad 3 \mapsto \frac{1}{3} \qquad 4 \mapsto -\frac{1}{4} \qquad \ldots \qquad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \ldots$$

  Formalmente, a sequêcia pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, onde

  $$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para para gerar a sequência como um todo.

- Maneiras típicas de se definir uma sequência são:
  - Prover uma fórmula explícita para cada termo da sequência.
  - Prover um algoritmo que gere a sequência.
  - Prover uma fórmula recursiva para cada termo da sequência.

- É importante notar que, dado um número limitado de termos

  $$a_1, a_2, \ldots, a_i$$

  de uma sequência, podemos achar uma regra que gere estes termos, mas esta regra é garantida apenas para os termos $a_1, a_2, \ldots, a_i$ apresentados.

  Nada garante que a fórmula ou algoritmo valha para a_{i+1}, ou para a sequência como um todo!

Defininindo uma sequência a partir de seus termos

- $\boxed{\text{Exemplo 26}}$ Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

A fórmula

$$a_n = n, \qquad \text{para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que

$$a_6 = 6.$$

Por outro lado, o algoritmo

"Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 *e* 5*"*

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que

$$a_6 = 11.$$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. <u>Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.</u>

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 27}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad 7, \quad 25, \quad 79, \quad 241, \quad 727, \quad 2\,185, \quad 6\,559, \quad 19\,681, \quad 59\,047.$$

Solução.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = 3^n - 2, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 28}}$ Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad 7, \quad -8, \quad 9, \quad -10.$$

Solução.

Esta é uma **sequência alternante**, ou seja, cada termo a_n possui sinal oposto ao do termo a_{n-1}.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$

Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 29}}$ Como produzir os termos de uma sequência cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4?$$

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

"Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes na sequência."

Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 30}}$ Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0?$$

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

"Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1."

Desafio: Você consegue encontrar uma fórmula explícita para esta mesma sequência?

Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

  Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos prévios na sequência (i.e., $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$) para cada $n \geq n_0$, onde n_0 é um inteiro não-negativo.

Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- $\boxed{\text{Exemplo 31}}$ A sequência

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720, \quad 5\,040, \quad 40\,320, \quad 362\,880, \quad \ldots$$

pode ser definida pela fórmula explícita

$$a_n = n!, \quad n \geq 0,$$

ou pela fórmula recursiva

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- Por enquanto vamos nos focar em fórmulas explícitas e algoritmos. Fórmulas recursivas serão estudadas em profundidade mais no curso de **Matemática Discreta**.

Somatórios e Produtórios

Somatórios

- Muitas vezes estamos interessados na soma ou no produto de todos os termos de uma sequência.

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **somatório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m \quad + \quad a_{m+1} \quad + \quad a_{m+2} \quad + \quad \ldots \quad + \quad a_n.$$

Para representação do somatório, usamos o **símbolo de somatório** Σ:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n.$$

Somatórios

- $\boxed{\text{Exemplo 32}}$ Seja a sequência $\{a_k\}$ em que $a_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^{6} a_k \quad = \quad 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \quad = \quad 9 + 16 + 25 + 36 \quad = \quad 86$$

- Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s),$$

em que S é um conjnto de domínio e f é uma função com domínio S.

- $\boxed{\text{Exemplo 33}}$

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 \quad = \quad 0^2 + 3^2 + 7^2 \quad = \quad 0 + 9 + 49 \quad = \quad 58.$$

Variáveis ligadas e livres em um somatório

- A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos.

  As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

- $\boxed{\text{Exemplo 34}}$ Em
$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$
  i é a variável ligada; n é uma variável livre.

- $\boxed{\text{Exemplo 35}}$ Em
$$\sum_{k=m}^{n} k^2$$
  k é a variável ligada; m e n são variáveis livres.

Mudança de variável em um somatório

- A variável ligada não é relevante:
  trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

- Exemplo 36

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)}{i} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)}{j} \quad = \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

- Variáveis livres são relevantes:
  trocar uma variável livre pode alterar o valor do somatório.

- Exemplo 37 Os somatórios abaixo são distintos, pois se $m \neq n$, eles darão valores diferentes.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)}{i} \quad \neq \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{(i+1)}{i}$$

Mudança de variável em um somatório

- Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuem termos idênticos.

- $\boxed{\text{Exemplo 38}}$

$$\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{3} k^2,$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 &= (2-1)^2+(3-1)^2+(4-1)^2 \\ &= 1^2+2^2+3^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 \quad = \quad 1^2+2^2+3^2$$

Mudança de variável em um somatório

- $\boxed{\text{Exemplo 39}}$ Substitua $k+1$ na soma abaixo por j:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

Passos:

1. Calcule os novos limites do somatório: $\begin{cases} \text{Para } k=0, & j=0+1=1 \\ \text{Para } k=6, & j=6+1=7 \end{cases}$

2. Calcule o termo geral:

   Como $j=k+1$, então $k=j-1$. Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j}.$$

Produtórios

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **produtório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \quad \cdot \quad a_{m+1} \quad \cdot \quad a_{m+2} \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad a_n.$$

Para representação do produtório, usamos o **símbolo de produtório** $\prod$:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

- Exemplo 40 $\quad \prod_{i=1}^{3} i^i \quad = \quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \quad = \quad 1 \cdot 4 \cdot 27 \quad = \quad 108$

- As definições de **variável ligada** e **variáveis livres** para somatórios também se aplicam a produtórios.

Propriedades de somatórios e produtórios

- Dadas duas sequências de números reais

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \ldots,$$

$$b_m, \quad b_{m+1}, \quad b_{m+2}, \quad \ldots,$$

e seja c é um número real qualquer.

Então as seguintes equações são válidas para qualquer $n \geq m$:

1. $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k \quad = \quad \sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$
2. $c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k \quad = \quad \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$
3. $\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) \quad = \quad \prod_{k=m}^{n}(a_k \cdot b_k)$