

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2020/01

Indução e Recursão

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Indução e recursão: Introdução

- Muitas afirmações matemáticas estabelecem que uma certa propriedade é satisfeita por todo inteiro positivo n :
 - ❶ $n! \leq n^n$
 - ❷ $n^3 - n$ é divisível por 3.
 - ❸ se um conjunto tem n elementos, seu conjunto potência tem 2^n elementos.

Aqui vamos ver uma técnica poderosa para demonstrar este tipo de resultado: a indução matemática.

- Em unidades anteriores também vimos como definir objetos, como conjuntos e funções, usando enumeração de elementos ou fórmulas explícitas.

Aqui vamos ver uma nova forma de definir objetos, via recursão, que é a definição de um objeto em função de si mesmo.

- Por fim, vamos também ver como usar a recursão na construção de algoritmos.
- Indução e recursão são técnicas essenciais da Matemática Discreta e têm inúmeras aplicações em Ciência da Computação.

Indução Matemática (Fraca)

Princípio da indução matemática: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você se pergunta: *“Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?”*
- Você sabe que
 1. você consegue alcançar o primeiro degrau, e
 2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar o próximo degrau.
- Usando as regras acima, você pode deduzir que:
 - 1 você consegue alcançar o primeiro degrau: pela regra 1;
 - 2 você consegue alcançar o segundo degrau: pela regra 1, depois regra 2;
 - 3 você consegue alcançar o terceiro degrau: regra 1, depois regra 2 por duas vezes;
 - 4 ...
 - 5 você consegue alcançar o n -ésimo degrau: regra 1, depois regra 2 por $n - 1$ vezes.
- Logo, você pode concluir que pode alcançar todos os degraus da escada!

Princípio da indução matemática (fracá)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n , uma **demonstração** que utilize o **princípio da indução matemática (fracá)** possui duas partes:

Demonstração por indução fracá:

Passo base: Demonstra-se $P(1)$.

Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k , se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k + 1)$ é verdadeiro.

- A premissa do passo indutivo ($P(k)$ é verdadeiro) é chamada de **hipótese de indução** ou **I.H.**
- O princípio da indução matemática pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 1 Se n é um inteiro positivo, então $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “a soma dos n primeiros inteiros positivos é $n(n + 1)/2$ ”.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k . Ou seja, a nossa hipótese de indução é de que, para um inteiro positivo k arbitrário:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 1 (Continuação)

Sob a hipótese de indução, deve-se mostrar que $P(k+1)$ é válido, ou seja:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Podemos, então, derivar

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(pela I.H.)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso tanto o passo base quanto o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ para todo inteiro positivo n . □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- **Exemplo 2** Desenvolva uma conjectura de uma fórmula equivalente à soma dos n primeiros inteiros ímpares.

Então, demonstre sua conjectura usando indução matemática.

Solução.

Vamos começar testando alguns exemplos com valores de n :

$$n = 1 : \quad 1$$

$$n = 2 : \quad 1 + 3 = 4$$

$$n = 3 : \quad 1 + 3 + 5 = 9$$

$$n = 4 : \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$n = 5 : \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$\dots : \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13\dots = ?$$

Qual padrão podemos tentar inferir a partir dos exemplos acima?

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 2 (Continuação)

Assim, chegamos a uma conjectura razoável, que tentaremos demonstrar:

“A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2 .”

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição *“A soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é n^2 ”*.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque o primeiro inteiro positivo ímpar é 1, o que é igual a 1^2 .

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k .

Note que o k -ésimo inteiro positivo ímpar é dado por $2k - 1$.

Logo, a hipótese de indução é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 2 (Continuação)

Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(k) \rightarrow P(k+1))$, onde $P(k+1)$ é:

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Logo, podemos derivar

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2(k + 1) - 1) \quad (\text{pela I.H.}) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que a soma dos n primeiros ímpares positivos é n^2 . □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 3 Para todo inteiro não-negativo n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque:

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^{0+1} - 1,$$

já que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1,$$

e o lado direito pode ser escrito como

$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 3 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, assuma como verdadeira a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Queremos mostrar que, se a hipótese acima for verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 3 (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^k 2^i \right) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(pela I.H.)} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1,\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 4 Para todo inteiro $n \geq 4$, $2^n < n!$.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $2^n < n!$ ”.

Passo base: $P(4)$ é verdadeiro porque $2^4 = 16$ é menor que $4! = 24$.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 4$, ou seja, a hipótese de indução é que, para um inteiro arbitrário $k \geq 4$,

$$2^k < k!.$$

Sob esta hipótese, queremos mostrar $P(k + 1)$, ou seja,

$$2^{k+1} < (k + 1)!$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 4 (Continuação)

Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned}2^{k+1} &= 2(2^k) \\ &< 2(k!) && \text{(pela I.H.)} \\ &< (k+1)k! && \text{(já que } k \geq 4\text{)} \\ &= (k+1)!,\end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : P(n)$, ou seja, que $2^n < n!$ para todo inteiro $n \geq 4$. \square

Exemplos de uso de indução matemática (fracas)

- Exemplo 5 Para todo inteiro $n \geq 0$, $n^3 - n$ é divisível por 3.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $n^3 - n$ é divisível por 3”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque $0^3 - 0 = 0$ é divisível por 3.

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, que é verdadeira a hipótese de indução de que $k^3 - k$ é divisível por 3.

Queremos mostrar que $P(k + 1)$ também é verdadeiro, ou seja, que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é divisível por 3.

Para isto, podemos fazer:

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 - (k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1) \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).\end{aligned}$$

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 5 (Continuação)

Então sabemos que

$$(k + 1)^3 - (k + 1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k).$$

Note que no lado direito da igualdade acima, a primeira parcela da soma é $(k^3 - k)$ e, pela I.H., este valor é divisível por 3.

Além disso, a segunda parcela $3(k^2 + k)$ da soma do lado direito também é divisível por 3.

Logo todo o lado direito da igualdade é divisível por 3, e assim concluímos indutivo ao mostrar que $(k + 1)^3 - (k + 1)$ é divisível por 3.

Assim mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que $n^3 - n$ é divisível por 3 para todo inteiro $n \geq 0$. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- **Exemplo 6** Para todo inteiro não-negativo n , se um conjunto possui n elementos, então este conjunto possui 2^n subconjuntos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “*todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos*”.

Passo base: $P(0)$ é verdadeiro porque o único conjunto de 0 elementos é o conjunto vazio \emptyset , que possui somente $2^0 = 1$ subconjunto (ele mesmo).

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro não-negativo arbitrário k , ou seja, a hipótese de indução é:

“*Todo conjunto de k elementos possui 2^k subconjuntos.*”

Sob a I.H., queremos demonstrar $P(k + 1)$, ou seja, que

“*Todo conjunto de $k + 1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.*”

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 6 (Continuação)

Para mostrar isto, seja T um conjunto qualquer de $k + 1$ elementos. Então é possível escrever T como $S \cup \{a\}$, onde

- a é um elemento qualquer de T ;
- $S = T - \{a\}$ e, portanto, $|S| = k$.

Note que os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte forma.

Para cada subconjunto X de S , existem exatamente dois subconjuntos de T : o subconjunto X (em que a não aparece) e o subconjunto $X \cup \{a\}$ (em que a aparece). Logo o número de subconjuntos de T é o dobro do número de subconjuntos de S . Pela hipótese indutiva, S tem 2^k subconjuntos, logo T possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Isto conclui o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, ou seja, que todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. \square

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 Uma das Leis de De Morgan afirma que, para dois conjuntos A_1 e A_2 , temos

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Sabendo disto, demonstre a seguinte generalização da Lei de De Morgan:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ $\overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$ ”.

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque, como já demonstramos nesse curso, a Lei de De Morgan original garante que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário $k \geq 2$, ou seja, a hipótese de indução é

$$\overline{\bigcap_{j=1}^k A_j} = \bigcup_{j=1}^k \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Queremos mostrar que, sob a I.H., $P(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},$$

sempre que A_1, A_2, \dots, A_n são subconjuntos de um conjunto universal U e $n \geq 2$.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 7 (Continuação)

Para isto, note que

$$\begin{aligned}\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) \cap A_{k+1}} \\ &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^k \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} \\ &= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j},\end{aligned}$$

(usando a Lei de De Morgan sobre os conjuntos $\bigcap_{j=1}^k A_j$ e A_{k+1})

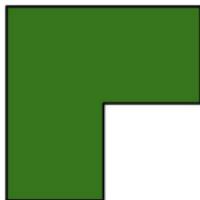
(pela I.H.)

de onde concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que a generalização da Lei de De Morgan é válida. □

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- **Exemplo 8** Seja o inteiro $n \geq 1$. Demonstre que qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L, formada por 3 quadradinhos, do tipo mostrado abaixo.

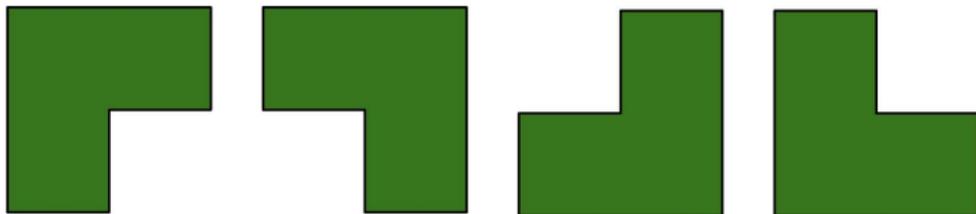


Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “qualquer região quadrada de tamanho $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato L”.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque qualquer tabuleiro de tamanho $2^1 \times 2^1$ com um quadrado removido pode ser preenchido com uma peça em formato de L, conforme mostrado abaixo:



Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro positivo arbitrário k , ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

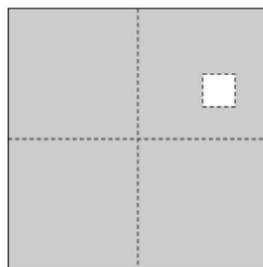
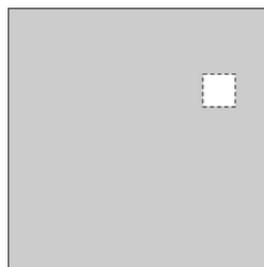
Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k + 1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que qualquer região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Para isto, considere uma região quadrada de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ qualquer, com um quadrado removido.

Divida essa região em quatro regiões de tamanho $2^k \times 2^k$ como mostrado abaixo.

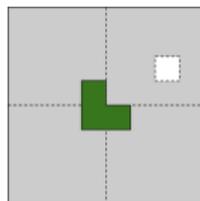
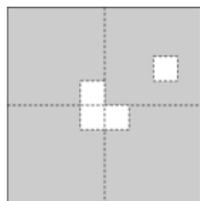


Pela hipótese de indução, a região $2^k \times 2^k$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. O problema passa a ser como a mesma hipótese indutiva pode ser aplicada às outras três regiões sem nenhum quadrado removido.

Exemplos de uso de indução matemática (fraca)

- Exemplo 8 (Continuação)

Temporariamente remova um quadrado de cada região $2^k \times 2^k$ que está “completa”, formando um “buraco” como mostrado na figura à esquerda.



Cada uma dessas três regiões tem tamanho $2^k \times 2^k$ e, portanto, pela I.H., podem ser preenchidas com peças no formato de L.

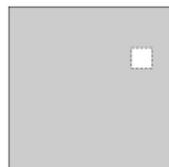
Para finalizarmos a solução, preenchamos o “buraco” criado pelas três peças removidas de cada região cobrindo-o com uma peça L, como mostrado na figura à direita. Com isto concluímos o passo indutivo.

Logo, por indução mostramos que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$, ou seja, que qualquer região de tamanho $2^n \times 2^n$, $n \geq 1$, com um quadrado removido, pode ser preenchida com peças no formato de L. □

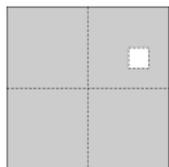
Exemplos de uso de indução matemática (fracá)

- Exemplo 8 (Continuação)

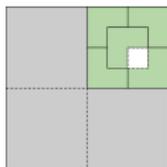
Passo a passo do passo indutivo da demonstração anterior:



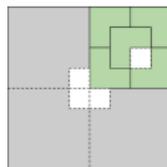
(a) Comece com a região de tamanho $2^{k+1} \times 2^{k+1}$



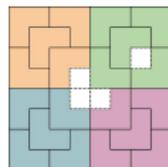
(b) Divida-a em 4 regiões de tamanho $2^k \times 2^k$



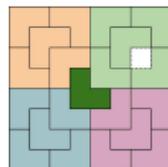
(c) Use a I.H. para preencher a região com o buraco



(d) Retire um quadrado de cada região restante



(e) Aplique a I.H. em cada uma das regiões restantes



(f) Preencha o buraco com uma peça em L



Quando usar indução matemática

- O princípio da indução pode ser utilizado para demonstrar propriedades dos números inteiros (se elas forem verdadeiras).
- O princípio da indução não pode ser utilizado para descobrir propriedades dos números inteiros.
 - A propriedade geralmente é descoberta usando um outro método, talvez até tentativa e erro, e uma vez que uma propriedade é conjecturada, a indução pode ser usada para demonstrá-la (caso a propriedade seja mesmo verdadeira).

Modelo de demonstração por indução matemática (fraca)

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma “para todo inteiro $n \geq b$, $P(n)$ ”, onde b é um inteiro fixo.
2. Escreva “Passo base.” e mostre que $P(b)$ é verdadeiro, se certificando de que o valor correto de b foi utilizado. Isto conclui o passo base.
3. Escreva as palavras “Passo indutivo.”
4. Escreva claramente a hipótese indutiva, na forma “Assuma que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro arbitrário fixo $k \geq b$.”
5. Escreva o que precisa ser demonstrado sob a suposição de que a hipótese de indução é verdadeira. Ou seja, escreva o que $P(k + 1)$ significa.
6. Demonstre a afirmação $P(k + 1)$ utilizando o fato de que $P(k)$ é verdadeiro. Certifique-se de que sua demonstração é válida para qualquer $k \geq b$.
7. Identifique claramente as conclusões do passo indutivo, e conclua-o escrevendo, por exemplo, “isto completa o passo de indução”.
8. Completados o passo base e o passo indutivo, escreva a conclusão da demonstração: que, por indução matemática, $P(n)$ é verdadeiro para todos os inteiros $n \geq b$.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Como em qualquer outra técnica de demonstração, o princípio da indução matemática deve ser usado com cautela para evitar erros.
- Em particular, para que a demonstração por indução esteja correta é preciso demonstrar ambos o passo base e o passo indutivo.

Se um dos dois passos não for demonstrado, o resultado não está garantido!

- Exemplo 9 Imagine que tenhamos a conjectura de que o predicado $P(n)$ definido como “ 10^n é múltiplo de 7” é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se quisermos demonstrar esta afirmação por indução:

- a) É possível demonstrar o passo indutivo?
- b) É possível demonstrar o passo base?
- c) A demonstração por indução pode ser concluída com sucesso?

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Exemplo 9 (Continuação)

Solução.

- a) Vamos começar pelo passo indutivo.

Passo indutivo: Assuma como hipótese indutiva que $P(k)$ seja verdadeiro para um inteiro $k \geq 0$ arbitrário, ou seja, que 10^k é divisível por 7. Sob a I.H., queremos mostrar que $P(k+1)$ também deve ser verdadeiro, ou seja, que 10^{k+1} é divisível por 7.

Se 10^k é divisível por 7, então existe um inteiro r tal que $10^k = 7r$.

Logo podemos derivar

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10 \cdot 10^k \\ &= 10 \cdot 7r && \text{(pela I.H.)} \\ &= 7(10r) \end{aligned}$$

e, portanto, 10^{k+1} é divisível por 7, o que conclui o passo indutivo com sucesso.

Princípio da indução matemática (fraca): Erros comuns

- Exemplo 9 (Continuação)

b) Agora olharemos o passo base.

Passo base: Queremos mostrar $P(0)$, ou seja, que $10^0 = 1$ é divisível por 7. Mas isso é claramente falso.

Logo o passo base não é válido.

c) Por fim concluímos que a demonstração por indução não foi completada com sucesso, pois, apesar de o passo indutivo ter sido demonstrado, o passo base não foi.

(Na verdade, o predicado $P(n)$ é falso para todo $n \in \mathbb{N}$!)



Indução Matemática (Forte) e Boa Ordenação

Princípio da indução matemática (forte): Introdução

- O princípio de indução que vimos até agora é conhecido como o **princípio da indução matemática fraca**:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : \overbrace{(P(k) \rightarrow P(k+1))}^{\text{I.H.}}}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Ele recebe este nome de indução “fraca” porque a hipótese de indução (I.H.) do passo indutivo é apenas que $P(k)$ seja verdadeiro para algum k .

- Às vezes é complicado usar a indução fraca para demonstrar um teorema, e podemos recorrer ao **princípio da indução matemática forte**.
 - Neste princípio, a hipótese de indução do passo indutivo é de que $P(j)$ é válido para todo $1 \leq j \leq k$.

Princípio da indução matemática (forte)

- Para mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para todos os inteiros positivos n , uma **demonstração** que utilize **princípio da indução matemática (forte)** possui duas partes:

Demonstração por indução forte:

Passo base: Demonstra-se $P(1)$;

Passo indutivo: Demonstra-se que, para qualquer inteiro positivo k , se $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

- A **hipótese de indução** ou **I.H.** da indução forte é $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$ são todos verdadeiros.
- O princípio da indução matemática forte pode ser expresso como uma regra de inferência sobre os números inteiros:

$$\left(\underbrace{P(1)}_{\text{Passo base}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{Z}^+ : (P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1))}_{\text{Passo indutivo}} \right) \rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)}_{\text{Conclusão}}$$

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Imagine que você esteja diante de uma escada de infinitos degraus, e você novamente se pergunta: *“Será que eu consigo alcançar qualquer degrau dessa escada?”*
- Mas, desta vez, você sabe que:
 1. você consegue alcançar o primeiro degrau e também o segundo degrau, e
 2. se você alcançar um degrau qualquer, você consegue alcançar dois degraus acima (ou seja, você pode subir degraus de dois em dois).
- Você consegue usar a indução fraca para verificar que conseguimos alcançar qualquer degrau dessa escada?

Princípio da indução matemática forte: Intuição

- Vamos tentar responder à pergunta usando indução forte.

Vamos chamar de $P(n)$ a proposição “*Eu consigo alcançar o n -ésimo degrau da escada*”.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque eu consigo alcançar o primeiro degrau. O mesmo vale para $P(2)$.

Passo indutivo: Assumamos como hipótese de indução que para um $k \geq 2$, as proposições $P(1), P(2), \dots, P(k)$ são todas verdadeiras. Queremos mostrar que $P(k + 1)$ também é verdadeiro, ou seja, que podemos alcançar também o $(k + 1)$ -ésimo degrau.

Para ver que podemos alcançar o degrau $k + 1$, note que pela I.H. alcançamos todos os degraus entre 1 e k (para $k \geq 2$), e, em particular, o degrau $k - 1$. Como alcançamos $k - 1$ e a regra 2 diz que uma vez que tenhamos alcançado um degrau podemos alcançar dois degraus acima, podemos alcançar o degrau $k + 1$. E assim termina o passo indutivo.

Dessa forma, a demonstração por indução forte está completa.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- **Exemplo 10** Se n é um inteiro maior que 1, então n pode ser escrito como o produto de números primos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “ n pode ser escrito como o produto de números primos”.

Passo base: $P(2)$ é verdadeiro porque 2 pode ser escrito como o produto de um número primo, ele mesmo.

Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para todos os inteiros positivos tais que $2 \leq j \leq k$, ou seja, que qualquer inteiro j entre 2 e k pode ser escrito como o produto de primos.

Para completar o passo indutivo, temos que mostrar que a I.H. de indução implica que $P(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja, que o inteiro $k+1$ também pode ser escrito como o produto de primos.

Exemplos de uso de indução matemática

- Exemplo 10 (Continuação)

Há dois casos a se considerarem: $k + 1$ é primo ou $k + 1$ é composto.

- Caso 1: $k + 1$ é primo. Neste caso $P(k + 1)$ é trivialmente verdadeiro, porque $k + 1$ é o produto de um único primo, ele mesmo.
- Caso 2: $k + 1$ é composto. Neste caso $k + 1$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros a e b tais que $2 \leq a \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como o produto de primos (já que $P(j)$ vale para todo $2 \leq j \leq k$). Logo, $k + 1 = ab$ também pode ser escrito como o produto de primos e assim concluímos o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, mostramos por indução que $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2 : P(n)$, ou seja, que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como o produto de números primos. \square

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- **Exemplo 11** Toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos.

Demonstração. Seja $P(n)$ a proposição “qualquer postagem de n centavos pode ser feita usando apenas selos de 4 centavos e selos de 5 centavos”.

Passo base: Vamos precisar de quatro casos base:

- $P(12)$ é verdadeiro porque podemos usar três selos de 4 centavos;
- $P(13)$ é verdadeiro porque podemos usar dois selos de 4 centavos e um selo de 5 centavos;
- $P(14)$ é verdadeiro porque podemos usar um selo de 4 centavos e dois selos de 5 centavos; e
- $P(15)$ é verdadeiro porque podemos usar 3 selos de 5 centavos;

Isto completa o passo base.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 11 (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é que $P(j)$ é verdadeiro para $12 \leq j \leq k$, onde k é um inteiro $k \geq 15$. Ou seja, a I.H. é que toda postagem de valores entre 12 centavos e k centavos pode ser feita usando selos de 4 e 5 centavos apenas.

Para completar o passo indutivo, vamos mostrar que, sob a I.H., $P(k + 1)$ é verdadeiro, ou seja, que uma postagem de $k + 1$ centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 5 centavos.

Pela I.H., $P(k - 3)$ é verdadeiro porque $k - 3 \geq 12$ e para todo $12 \leq j \leq k$ temos $P(j)$ verdadeiro. Logo, existe uma maneira de postar $k - 3$ centavos usando apenas selos de 4 e 5 centavos. Para postar $k + 1$ centavos, basta acrescentar à postagem possível para $k - 3$ centavos um selo de 4 centavos.

Isto conclui o passo indutivo e a demonstração. \square

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- **Exemplo 12** O Jogo de Nim possui as seguintes regras:

1. Há duas pilhas de fósforos (não vazias) sobre a mesa.
2. Dois jogadores se alternam em rodadas, sendo que em cada rodada um jogador escolhe uma pilha de fósforos e retira da mesma um número positivo de fósforos.
3. O jogador que remover o último fósforo ganha o jogo.

Mostre que se as duas pilhas de fósforos contêm inicialmente o mesmo número de fósforos, então o segundo jogador sempre pode ganhar o Jogo de Nim.

Demonstração. Seja n o número de fósforos em cada pilha. Seja $P(n)$ a proposição “o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim se houver inicialmente n fósforos em cada pilha”.

Passo base: $P(1)$ é verdadeiro porque nesse caso o primeiro jogador só tem uma opção: remover um fósforo de uma das pilhas, e assim o segundo jogador ganha ao remover o fósforo da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 12 (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é a afirmação de que $P(j)$ é verdadeiro para todo $1 \leq j \leq k$, ou seja, que o segundo jogador sempre pode vencer o Jogo de Nim em que cada pilha começa com j fósforos, sendo j um inteiro entre 1 e k .

Assumindo a I.H., precisamos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeiro, ou seja, que o segundo jogador pode vencer o Jogo de Nim se cada pilha começar com $k + 1$ fósforos.

Para mostrar isto, suponha que cada pilha comece com $k + 1$ fósforos. Pelas regras do jogo, o primeiro jogador tem que remover um número r fósforos tal que $1 \leq r \leq k + 1$. Comece por notar que se o primeiro jogador remover exatamente $k + 1$ fósforos de uma pilha, o segundo jogador ganha ao remover $k + 1$ fósforos da outra pilha.

Exemplos de uso de indução matemática (forte)

- Exemplo 12 (Continuação)

Vamos nos concentrar agora no caso de o primeiro jogador remover $1 \leq r \leq k$ fósforos de uma pilha.

Nesse caso, o segundo jogador pode remover o mesmo número r de fósforos da outra pilha.

Nesse caso, cada pilha passa a conter um número igual de fósforos $k + 1 - r$.

Como $1 \leq k + 1 - r \leq k$, a hipótese de indução garante que o segundo jogador pode ganhar o Jogo de Nim uma vez que cada pilha tenha $k + 1 - r$ fósforos.

Logo a indução forte termina. □

Princípio da Boa Ordenação

- O princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes:
 1. Toda demonstração que pode ser feita com indução fraca, pode ser feita também com indução forte.
 - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?
 2. Toda demonstração que pode ser feita com indução forte, pode ser feita também com indução fraca.
 - Desafio para o(a) estudante: como demonstrar isto?
- Além disso, o princípio da indução matemática fraca e forte são equivalentes ao seguinte axioma dos números naturais:

Princípio da Boa Ordenação: Seja S um subconjunto não-vazio de \mathbb{N} . Então S tem um menor elemento.

Definições Recursivas e Indução Estrutural

Recursão: Introdução

- Algumas vezes não é fácil definir um objeto explicitamente, mas é relativamente mais fácil defini-lo em termos de si próprio.

Por exemplo:

- ① Definição dos números naturais em termos de números naturais:
 - 0 é um número natural;
 - o sucessor de um número natural é um número natural.
- A definição de um objeto em termos de si próprio é chamada **definição recursiva**.
- A **recursão** é muito utilizada para definir, por exemplo:
 - ① funções,
 - ② sequências,
 - ③ conjuntos, e
 - ④ algoritmos.

Definição recursiva de funções

- Uma **definição recursiva de uma função** com domínio nos números inteiros não-negativos tem duas partes:

Definição recursiva de função:

Passo base: Especifica-se o valor da função em 0.

Passo recursivo: Especifica-se uma regra para encontrar o valor da função em um inteiro qualquer baseada no valor da função em inteiros menores.

- Lembre-se de que uma função $f(n)$ dos inteiros não-negativos para os reais é equivalente a uma sequência

$$a_0, a_1, a_2, \dots,$$

onde a_i é um número real para todo inteiro não-negativo i .

Logo, definir uma sequência a_0, a_1, a_2, \dots de números reais de forma recursiva é equivalente a definir uma função recursiva dos inteiros não-negativos para os reais.

Definição recursiva de funções

- Exemplo 13 Seja a função f definida como

$$\begin{cases} f(0) = 3, \\ f(n) = 2f(n-1) + 3, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Encontre $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

Solução.

- $f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;
- $f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$;
- $f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$;
- $f(4) = 2f(3) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$.



Definição recursiva de funções

- Exemplo 14 Encontre uma definição recursiva para a função fatorial $f(n) = n!$, e compute $f(5)$ usando sua definição.

Solução. Uma definição recursiva para $f(n) = n!$ é:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(n) = n \cdot f(n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$

Podemos então calcular $f(5)$ como:

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 \cdot f(4) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot f(3)) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot f(2))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot f(1)))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot f(0))))) \\ &= 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)))) \\ &= 120. \end{aligned}$$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 15 Encontre uma definição recursiva para a função $f(n) = a^n$, tendo como domínio os naturais, e compute $f(3)$ usando sua definição.

Solução. Uma definição recursiva para $f(n) = a^n$ é:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(n) = a \cdot f(n-1), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Podemos então calcular $f(3)$ como:

$$\begin{aligned} f(3) &= a \cdot f(2) \\ &= a \cdot (a \cdot f(1)) \\ &= a \cdot (a \cdot (a \cdot f(0))) \\ &= a \cdot (a \cdot (a \cdot 1)) \\ &= a^3. \end{aligned}$$



Definição recursiva de funções

- Exemplo 16 Outros exemplos de definições recursivas:

$$\text{Somatório: } \begin{cases} \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \\ \sum_{i=1}^n a_i = (\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + a_n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Produtório: } \begin{cases} \prod_{i=1}^1 a_i = a_1 \\ \prod_{i=1}^n a_i = (\prod_{i=1}^{n-1} a_i) \cdot a_n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{União: } \begin{cases} \bigcup_{i=1}^1 A_i = A_1 \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Interseção: } \begin{cases} \bigcap_{i=1}^1 A_i = A_1 \\ \bigcap_{i=1}^n A_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 17 A sequência de Fibonacci é aquela em que os dois primeiros termos são 1, e cada termo seguinte é a soma dos dois anteriores:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Esta sequência pode ser definida recursivamente como:

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Para calcular $f(5)$ podemos fazer:

$$f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1,$$

$$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$

$$f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3,$$

$$f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5.$$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 18 A função 91 de McCarthy é a função sobre os inteiros positivos definida como:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10, & n > 100, \\ M(M(n + 11)), & n \leq 100. \end{cases}$$

Podemos, então, calcular:

$$\begin{aligned} M(99) &= M(M(110)) && \text{(já que } 99 \leq 100\text{)} \\ &= M(100) && \text{(já que } 110 > 100\text{)} \\ &= M(M(111)) && \text{(já que } 100 \leq 100\text{)} \\ &= M(101) && \text{(já que } 111 > 100\text{)} \\ &= 91 && \text{(já que } 101 > 100\text{)} \end{aligned}$$

Esta função retorna 91 para todo inteiro positivo $n \leq 100$, e para inteiros positivo $n > 100$ ela começa em 91 e vai aumentando de 1 em 1.



Definição recursiva de funções

- **Exemplo 19** Seja a sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ definida explicitamente como

$$a_n = n^2 + 3n$$

Encontre uma definição recursiva para esta sequência.

Solução.

Primeiro determinamos o passo base da sequência, ou seja, a_1 :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 + 3 \cdot 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Agora determinamos o passo recursivo a_{n+1} para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 + 3(n+1) && \text{(pela definição explícita da sequência)} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 && \text{(expandindo os produtos)} \\ &= (n^2 + 3n) + 2n + 4 && \text{(reagrupando as parcelas)} \\ &= a_n + 2n + 4 && \text{(pela definição explícita da sequência).} \end{aligned}$$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 19 (Continuação)

Assim obtemos a seguinte definição recursiva para a sequência:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 4, \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Note que o passo recursivo da definição acima define os termos $a_2, a_3, a_4 \dots$ dando uma fórmula para calcular cada termo a_{n+1} para $n \geq 1$.

Definição recursiva de funções

- Exemplo 19 (Continuação)

Alternativamente, podemos encontrar um passo recursivo que defina $a_2, a_3, a_4 \dots$ dando uma fórmula para calcular a_n para $n \geq 2$.

Primeiro determinamos a_{n-1} em função de a_n :

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= (n-1)^2 + 3(n-1) && \text{(pela definição explícita da sequência)} \\ &= n^2 - 2n + 1 + 3n - 3 && \text{(expandindo os produtos)} \\ &= (n^2 + 3n) - 2n - 2 && \text{(reagrupando as parcelas)} \\ &= a_n - 2n - 2 && \text{(pela definição explícita da sequência).} \end{aligned}$$

Uma vez determinado que $a_{n-1} = a_n - 2n - 2$, podemos deduzir que $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$, o que produz a seguinte definição recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 2, & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Definição recursiva de funções

- Exemplo 19 (Continuação)

Podemos verificar que as duas definições recursivas encontradas são equivalentes à definição explícita para alguns termos da sequência:

Definição explícita:	Primeira def. recursiva:	Segunda def. recursiva:
$a_n = n^2 + 3n, n \geq 1$	$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 4, n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 2, n \geq 2 \end{cases}$
$a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$	$a_1 = 4$	$a_1 = 4$
$a_2 = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$	$a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 4 = 10$	$a_2 = 4 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$
$a_3 = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$	$a_3 = 10 + 2 \cdot 2 + 4 = 18$	$a_3 = 10 + 2 \cdot 3 + 2 = 18$
$a_4 = 4^2 + 3 \cdot 4 = 28$	$a_4 = 18 + 2 \cdot 3 + 4 = 28$	$a_4 = 18 + 2 \cdot 4 + 2 = 28$
$a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$	$a_5 = 28 + 2 \cdot 4 + 4 = 40$	$a_5 = 28 + 2 \cdot 5 + 2 = 40$
...



Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- Uma **definição recursiva de um conjunto** tem duas partes:

Definição recursiva de conjunto:

Passo base: Especifica-se uma coleção inicial de objetos pertencente ao conjunto.

Passo recursivo: Especificam-se regras para formar novos elementos a partir dos elementos já pertencentes ao conjunto.

- A definição recursiva de conjuntos também depende da seguinte regra, frequentemente implícita:

Regra de exclusão: elementos que não podem ser gerados a partir da aplicação do passo base e instâncias do passo indutivo não pertencem ao conjunto.

Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- Exemplo 20 Seja o conjunto S definido como:

$$\begin{cases} 3 \in S, \\ \text{se } x \in S \text{ e } y \in S, \text{ então } x + y \in S. \end{cases}$$

Então, é verdade que:

- $6 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $3 + 3 = 6$,
- $9 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $6 \in S$ e $3 + 6 = 9$,
- $12 \in S$? Sim, porque $3 \in S$ e $9 \in S$ e $3 + 9 = 12$,
- $7 \in S$? Não, pela regra de exclusão.

O conjunto S é o conjunto dos múltiplos positivos de 3. ●

Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- Muitos problemas lidam com **palavras**, ou **strings**, formadas a partir de um **alfabeto**.
- O conjunto Σ^* de **strings** sobre um alfabeto Σ pode ser definido recursivamente como:

Passo base: $\lambda \in \Sigma^*$ (onde λ representa a string vazia, sem símbolo algum).

Passo recursivo: Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$ então $wx \in \Sigma^*$ (onde wx representa a string formada pelo símbolo x concatenado ao final do prefixo w).

Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- **Exemplo 21** Seja o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Qual o conjunto de strings Σ^* que pode ser formado a partir de Σ ?

Solução.

Sabemos que:

- $\lambda \in \Sigma^*$ pelo passo base;
- $0 \in \Sigma^*$ porque $\lambda \in \Sigma^*$, $0 \in \Sigma$, e podemos juntar $\lambda 0 = 0$;
- $1 \in \Sigma^*$ porque $\lambda \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e podemos juntar $\lambda 1 = 1$;
- $00 \in \Sigma^*$ porque $0 \in \Sigma^*$, $0 \in \Sigma$, e podemos juntar 00 ;
- $01 \in \Sigma^*$ porque $0 \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e podemos juntar 01 ;
- $011 \in \Sigma^*$ porque $01 \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma$, e podemos juntar 011 ;
- ...

De fato, Σ^* é o conjunto de todas as strings binárias.



Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- Seja ℓ (*length*) a função que retorna o **comprimento** de uma string, ou seja, para todo $w \in \Sigma^*$, o valor $\ell(w)$ é o número de símbolos em w .

Podemos definir ℓ recursivamente como:

Passo base: $\ell(\lambda) = 0$.

Passo recursivo: $\ell(wx) = \ell(w) + 1$, se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$.

- Exemplo 22 Podemos calcular o tamanho $\ell(01011)$ como:

$$\begin{aligned}\ell(01011) &= \ell(0101) + 1 \\ &= (\ell(010) + 1) + 1 \\ &= ((\ell(01) + 1) + 1) + 1 \\ &= (((\ell(0) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= ((((\ell(\lambda) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= (((((0 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Definição recursiva de conjuntos e estruturas

- **Exemplo 23** O conjunto das sentenças lógicas bem formadas pode ser definido recursivamente como:

Passo base: T , F e s são sentenças bem formadas, onde s representa uma proposição lógica.

Passo recursivo: Se G e H são sentenças bem formadas, então $(\neg G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são sentenças bem formadas.

- Podemos facilmente verificar que, se p e q são proposições lógicas, então:
 - 1 F , $(p \wedge T)$, $(p \rightarrow q)$, $((p \rightarrow q) \vee T)$ são sentenças bem formadas.
 - 2 $\neg pq$, $\wedge q$, TF são sentenças mal-formadas (pela regra da exclusão).

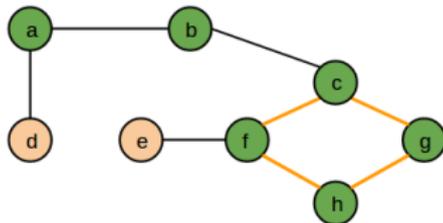


Definição recursiva de árvores

- Para o próximo exemplo, vamos precisar de alguns conceitos úteis.
- Um grafo $G = (V, E)$ é formado por:
 - um conjunto V de **vértices** ou **vértices**, e
 - um conjunto E de **arestas**, em que cada aresta é um par ordenado (v_i, v_j) indicando que os vértices $v_i, v_j \in V$ estão conectados.

- Um **ciclo** em um grafo é um caminho de arestas consecutivas que começa e termina no mesmo vértice.
- Um **vértice interno** está conectado a pelo menos dois outros vértices do grafo.
- Uma **folha** é um vértice conectado a no máximo um outro vértice.

- Por exemplo, no grafo abaixo:



- Vértices são representados por círculos e arestas por linhas conectando vértices.
- Existe um ciclo começando no vértice c e passando por g, h, f , até voltar em c .
- Os vértices a, b, c, f, g, h são vértices internos.
- Os vértices d, e são folhas.

Definição recursiva de árvores

- Exemplo 24 Uma **árvore** é um grafo sem ciclos. Uma **árvore binária completa** é uma árvore em que cada vértice, com exceção das folhas, possui exatamente dois vértices filhos.

Uma árvore binária completa pode ser definida recursivamente como:

Passo base: Um vértice isolado é uma árvore binária completa.

Passo recursivo: Se T_1 e T_2 são árvores binárias completas disjuntas com raízes r_1 e r_2 , respectivamente, então pode-se formar uma nova árvore binária completa ao se conectar um vértice r (não presente em T_1 ou T_2 , que chamaremos de *raiz*) através de uma aresta a r_1 e outra aresta a r_2 .

Definição recursiva de árvores

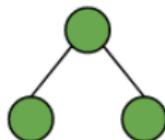
- Exemplo 24 (Continuação)

Exemplo de construção recursiva de árvores binárias completas:

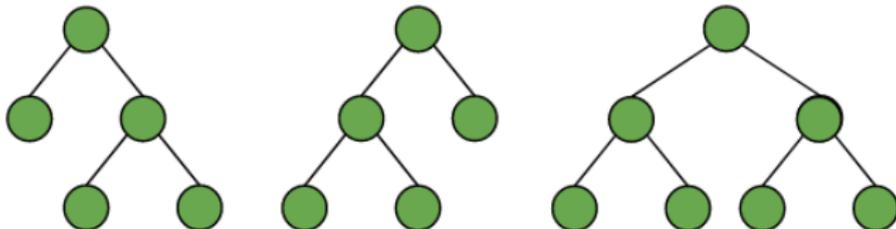
Passo base:



Passo 1:



Passo 2:



Indução estrutural

- Se um conjunto tem uma definição recursiva, é possível demonstrar propriedades dos elementos deste conjunto através de indução.
- A **indução estrutural** é uma maneira de mostrar que se:
 1. os elementos iniciais do conjunto (passo base) satisfazem uma certa propriedade, e
 2. as regras de construção de novos elementos (passo indutivo) preservam esta propriedade,

então todos os elementos do conjunto satisfazem a propriedade.

Indução estrutural

- Uma **demonstração por indução estrutural** tem duas partes:

Demonstração por indução estrutural:

Passo base: Mostra-se que a proposição é válida para todos os elementos especificados no passo base da definição recursiva do conjunto.

Passo indutivo: Mostra-se que se a proposição é válida para cada um dos elementos usados para se construírem novos elementos do conjunto, então a proposição também é válida para estes novos elementos.

- A **hipótese de indução** é de que a proposição vale para cada um dos elementos usados para se construírem novos elementos do conjunto.

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 25 Seja o conjunto A definido como:

$$\begin{cases} 3 \in A, \\ x, y \in A \rightarrow x + y \in A. \end{cases}$$

Mostre que todos os elementos de A são divisíveis por 3.

Demonstração. Seja $P(x)$ a proposição “ x é divisível por 3”.

Passo base: O único elemento da base é 3, e $P(3)$ é verdadeiro porque 3 é divisível por 3.

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 25 (Continuação)

Passo indutivo: Assuma que $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiros para dois elementos x e y em A . Ou seja, a I.H. é que os x e y de A são ambos divisíveis por 3.

A regra recursiva diz que posso usar x e y para incluir o elemento $x + y$ em A , logo que mostrar que $P(x + y)$ também é verdadeiro.

Para isto, note que se x e y são divisíveis por 3, então existem $k', k'' \in \mathbb{N}$ tais que $x = 3k'$ e $y = 3k''$. Nesse caso, podemos derivar:

$$x + y = 3k' + 3k'' = 3(k' + k''),$$

de onde concluímos que $x + y$ também é divisível por 3. Isto conclui o passo indutivo.

Como concluímos com sucesso o passo base e o passo indutivo, a demonstração por indução estrutural está concluída. □

Exemplos de uso de indução estrutural

- **Exemplo 26** O conjunto das sentenças lógicas bem formadas pode ser definido recursivamente como:

Passo base: T , F e s são sentenças bem formadas, onde s representa uma proposição lógica.

Passo recursivo: Se G e H são sentenças bem formadas, então $(\neg G)$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são sentenças bem formadas.

Mostre que em toda sentença bem formada o número de "(" e ")" são iguais.

Demonstração. Seja $P(E)$ a proposição "A expressão bem formada E tem um igual número de "(" e de ")"".

Passo base: Os elementos da base são T , F , e qualquer proposição lógica, e todos estes elementos não possuem nenhum "(" ou ")"".

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 26 (Continuação)

Passo indutivo: Temos que verificar que cada uma das regras de criação de novas sentenças mantém a propriedade de que a nova sentença possui parênteses balanceados.

Assumindo como I.H. que $P(G)$ e $P(H)$ sejam verdadeiros para duas sentenças bem formadas G e H , vamos analisar cada regra separadamente:

- Regra “ $(\neg G)$ é bem formada”: pela I.H., G possui igual número de “(”s e “)”. Como a regra acrescenta exatamente um “(” e um “)”, então $P((\neg G))$ é verdadeiro.
- Regra “ $(G \wedge H)$ é bem formada”: pela I.H., tanto G quanto H possuem igual número de “(”s e “)”. Como a regra acrescenta exatamente um “(” e um “)”, então $P((G \wedge H))$ é verdadeiro.
- Os casos das regras para $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são semelhantes.

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 26 (Continuação)

Tendo analisado todas as regras do caso recursivo, concluímos o passo indutivo e, assim, a demonstração. □

Exemplos de uso de indução estrutural

- **Exemplo 27** Seja o conjunto S formado por pares ordenados de números naturais definido recursivamente como:

Passo base: $(0, 0) \in S$.

Passo recursivo: Se $(x, y) \in S$ então $(x + 2, y + 3) \in S$ e $(x + 3, y + 2) \in S$.

Mostre que todo elemento de S satisfaz a propriedade de que a soma de suas coordenadas é divisível por 5.

Demonstração. Seja $P((x, y))$ a proposição “ $x + y$ é divisível por 5”.

Passo base: O único elemento da base é $(0, 0)$, e claramente $P(0, 0)$ é verdadeiro já que $0 + 0$ é divisível por 5.

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 27 (Continuação)

Passo indutivo: Temos que verificar que cada uma das regras de criação de novos pares ordenados mantém a propriedade de que o novo par ordenado tem a soma de suas coordenadas divisível por 5. A I.H. é de que $P((x, y))$ é verdadeiro para um $(x, y) \in S$.

Vamos analisar cada regra separadamente.

- Regra $(x + 2, y + 3) \in S$: a soma das coordenadas deste novo par é $x + 2 + y + 3 = (x + y) + 5$. Pela I.H. $(x + y)$ é divisível por 5, logo $(x + y) + 5$ também é divisível por 5 e podemos concluir que $P((x + 2, y + 3))$ é verdadeiro.
- Regra $(x + 3, y + 2) \in S$: a soma das coordenadas deste novo par é $x + 3 + y + 2 = (x + y) + 5$. Pela I.H. $(x + y)$ é divisível por 5, logo $(x + y) + 5$ também é divisível por 5 e podemos concluir que $P((x + 3, y + 2))$ é verdadeiro.

Por termos analisado todas as regras do caso recursivo, o passo indutivo da demonstração está concluído. □

Exemplos de uso de indução estrutural

- **Exemplo 28** Neste exemplo demonstramos que a definição recursiva da sequência encontrada em um exemplo anterior está correta.

Seja sequência $\{a_n\}$ definida explicitamente, para $n \geq 1$, como

$$a_n = n^2 + 3n,$$

e seja $\{b_n\}$ a sequência definida recursivamente como

$$\begin{cases} b_1 = 4, \\ b_n = b_{n-1} + 2n + 2, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

Mostre por indução que as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são idênticas.

Demonstração. Seja $P(b_n)$ a proposição “ $b_n = n^2 + 3n$ ” (ou seja, a proposição de que o elemento b_n é igual ao elemento a_n).

Passo base: Temos $b_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$, o que é verdadeiro pelo passo base da definição recursiva.

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 28 (Continuação)

Passo indutivo: Assumamos a I.H. de que $P(b_{k-1})$ é verdadeiro para um b_{k-1} arbitrário na sequência, ou seja, que $b_{k-1} = (k-1)^2 + 3(k-1)$.

Queremos mostrar que $P(b_k)$ também é verdadeiro, ou seja, que $b_k = a_k$. Para isto, podemos derivar

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k-1} + 2k + 2 && \text{(pela definição de } \{b_n\}) \\ &= (k-1)^2 + 3(k-1) + 2k + 2 && \text{(pela I.H.)} \\ &= k^2 - 2k + 1 + 3k - 3 + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k, \end{aligned}$$

de onde concluímos o passo indutivo e, assim, a demonstração. □

Exemplos de uso de indução estrutural

- Para o próximo exemplo, vamos introduzir mais alguns conceitos sobre árvores binárias completas.
- A **altura** $h(T)$ de uma árvore binária completa T é definida recursivamente como:

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se o único vértice da árvore binária} \\ & \text{completa } T \text{ é a própria raiz} \\ 1 + \max(h(T_1), h(T_2)), & \text{se a árvore binária completa } T \\ & \text{é formada por uma raiz tendo como} \\ & \text{sub-árvores } T_1 \text{ e } T_2. \end{cases}$$

Exemplos de uso de indução estrutural

- O **número de vértices** $n(T)$ de uma árvore binária completa T é definido recursivamente como:

$$n(T) = \begin{cases} 1, & \text{se o único vértice da árvore binária} \\ & \text{completa } T \text{ é a própria raiz} \\ 1 + n(T_1) + n(T_2), & \text{se a árvore binária completa } T \\ & \text{é formada por uma raiz tendo como} \\ & \text{sub-árvores } T_1 \text{ e } T_2. \end{cases}$$

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 29 Mostre em uma árvore binária completa T , temos

$$n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1 .$$

Demonstração. Vamos demonstrar esta desigualdade usando indução estrutural.

Passo base: Para uma árvore binária completa T consistindo apenas num vértice raiz, note que, por definição: $n(T) = 1$ e $h(T) = 0$, logo a desigualdade é satisfeita pois

$$\begin{aligned} n(T) &= 1 , & e \\ 2^{h(T)+1} - 1 &= 2^{0+1} - 1 = 1 , \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1 .$$

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 29 (Continuação)

Passo indutivo: A nossa hipótese de indução é que temos

$$n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1, \quad \text{e}$$

$$n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1$$

sempre que T_1 e T_2 forem árvores binárias completas.

Assuma que T é uma árvore binária completa tendo T_1 e T_2 como sub-árvores imediatas.

As fórmulas recursivas de $n(T)$ e $h(T)$ determinam que

$$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2), \quad \text{e}$$

$$h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2)).$$

Exemplos de uso de indução estrutural

- Exemplo 29 (Continuação)

Assim, podemos computar:

$$\begin{aligned}n(T) &= \text{(def. recursiva de } n(T)) \\1 + n(T_1) + n(T_2) &\leq \text{(hipótese de indução)} \\1 + (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1) &\leq \text{(*)} \\2 \cdot \max(2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}) - 1 &= \text{(max}(2^x, 2^y) = 2^{\max(x,y)}) \\2 \cdot 2^{\max(h(T_1), h(T_2))+1} - 1 &= \text{(def. recursiva de } h(T)) \\2 \cdot 2^{h(T)} - 1 &= \text{(man. algébrica)} \\2^{h(T)+1} - 1 &\end{aligned}$$

onde o passo (*) vale porque a soma de dois termos é sempre menor ou igual a duas vezes o maior termo.



Algoritmos Recursivos

Algoritmo recursivos: Introdução

- Às vezes podemos reduzir a solução de um problema com um conjunto particular de valores de entrada para a solução do mesmo problema com valores de entrada menores.
- Quando tal redução pode ser feita, a solução para o problema original pode ser encontrada via uma sequência de reduções, até que o problema tenha sido reduzido a algum caso inicial para o qual a solução é conhecida.
- Veremos que algoritmos que reduzem sucessivamente um problema ao mesmo problema entradas menores são usadas para resolver uma grande variedade de problemas.

Tais algoritmos são chamados de recursivos.

- Um **algoritmo recursivo** é um algoritmo que resolve um problema reduzindo este problema a uma instância do mesmo problema com entradas menores.
- A seguir vamos ver vários exemplos de algoritmos recursivos.

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 30 Dê um algoritmo recursivo para computar $n!$, onde n é um número inteiro não-negativo.

Solução. Para construir um algoritmo recursivo que encontre $n!$, onde n é um inteiro não-negativo, podemos nos basear na definição recursiva de $n!$:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{se } n > 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Esta definição diz que para encontrar $n!$ para um inteiro particular n , podemos usar a etapa recursiva repetidamente vezes, em cada vez substituindo um valor da função fatorial pelo valor da função fatorial no próximo inteiro menor.

Fazemos isso até atingir o passo base, em que o inteiro a ser computado é 0, e podemos inserir o valor conhecido de $0! = 1$.

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 30 (Continuação)

Um pseudo-código para um algoritmo recursivo para a função fatorial é o seguinte.

```
procedure factorial(n: nonnegative integer)
if n = 0 then return 1
else return n · factorial(n - 1)
{output is n!}
```

Exemplo de execução do algoritmo para o valor de entrada $n = 4$:

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
<code>factorial(4)</code>	<code>4 · factorial(3)</code>	24
<code>factorial(3)</code>	<code>3 · factorial(2)</code>	6
<code>factorial(2)</code>	<code>2 · factorial(1)</code>	2
<code>factorial(1)</code>	<code>1 · factorial(0)</code>	1
<code>factorial(0)</code>	—	1



Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 31 Dê um algoritmo recursivo para calcular a^n , onde a é um número real diferente de zero e n é um inteiro não-negativo.

Solução. Para construir um algoritmo recursivo que encontre a^n , onde a é um real diferente de zero e n é um inteiro não-negativo, podemos nos basear na definição recursiva de a^n :

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a^{n-1}, & \text{se } n > 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Esta definição diz que para encontrar a^n para valores particulares de a e n , podemos usar a etapa recursiva repetidamente vezes, em cada vez substituindo um valor da função de exponenciação pelo valor da função de exponenciação com um expoente sendo o próximo inteiro menor.

Fazemos isso até atingir o passo base, em que o valor a ser computado é a^0 , e podemos inserir o valor conhecido de $a^0 = 1$.

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 31 (Continuação)

Um pseudo-código para um algoritmo recursivo para a função de exponenciação é o seguinte.

```
procedure power(a: nonzero real number, n: nonnegative integer)
if n = 0 then return 1
else return a · power(a, n - 1)
{output is  $a^n$ }
```

Exemplo de execução do algoritmo para o valor de entrada $a = 2$, $n = 4$:

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
$\text{power}(2, 4)$	$2 \cdot \text{power}(2, 3)$	16
$\text{power}(2, 3)$	$2 \cdot \text{power}(2, 2)$	8
$\text{power}(2, 2)$	$2 \cdot \text{power}(2, 1)$	4
$\text{power}(2, 1)$	$2 \cdot \text{power}(2, 0)$	2
$\text{power}(2, 0)$	—	1

Exemplos de algoritmos recursivos

- **Exemplo 32** Dada uma sequência $L = a_1, a_2, \dots, a_n$ de elementos e um elemento arbitrário x , uma **pesquisa linear** do elemento x em L retorna:
 - o menor valor de i tal que $a_i = x$, caso o valor x esteja presente na lista L ; ou
 - o valor 0, caso o valor x não esteja na lista L .

Expresse a pesquisa linear como um algoritmo recursivo.

Solução. Vamos chamar de $search(i, j, x)$ o procedimento que procura a primeira ocorrência de x na sub-sequência a_i, a_{i+1}, \dots, a_j de L iniciada em a_i e terminada em a_j .

A entrada para o algoritmo recursivo da pesquisa linear consiste na tripla $(1, n, x)$, pois queremos que o elemento x seja procurado na lista L toda, ou seja, entre a_1 e a_n .

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 32 (Continuação)

O algoritmo funciona assim:

1. Se o primeiro termo da sub-sequência a ser pesquisada for o próprio x , o algoritmo retorna o índice i deste termo.
2. Se a sub-sequência a ser pesquisada só tem um elemento e este elemento não é x , o algoritmo retorna 0.
3. Se o primeiro termo da sub-sequência a ser pesquisada não é x , mas a sub-sequência tem termos adicionais, o mesmo algoritmo é repetido na sub-sequência obtida retirando-se o primeiro termo da sub-sequência atual.

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 32 (Continuação)

Um pseudo-código para um algoritmo recursivo para a função de pesquisa linear é o seguinte.

```
procedure search(i, j, x: integers,  $1 \leq i \leq j \leq n$ )  
if  $a_i = x$  then  
    return i  
else if  $i = j$  then  
    return 0  
else  
    return search( $i + 1, j, x$ )
```

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 32 (Continuação)

Exemplo de execução do algoritmo de pesquisa linear para os valores de entrada

$$i = 1, \quad j = 5, \quad x = 17,$$

na lista

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 20, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 5 :$$

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
search(1, 5, 17)	search(2, 5, 17)	4
search(2, 5, 17)	search(3, 5, 17)	4
search(3, 5, 17)	search(4, 5, 17)	4
search(4, 5, 17)	-----	4

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 32 (Continuação)

Exemplo de execução do algoritmo de pesquisa linear para os valores de entrada

$$i = 1, \quad j = 5, \quad x = 10,$$

na lista

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 20, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 5 :$$

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
search(1, 5, 10)	search(2, 5, 10)	0
search(2, 5, 10)	search(3, 5, 10)	0
search(3, 5, 10)	search(4, 5, 10)	0
search(4, 5, 10)	search(5, 5, 10)	0
search(5, 5, 10)	—	0



Exemplos de algoritmos recursivos

- **Exemplo 33** Dada uma sequência $L = a_1, a_2, \dots, a_n$ de de inteiros positivos em ordem crescente e um elemento arbitrário x , uma **pesquisa binária** do elemento x em L funciona assim:
 1. Compare o elemento x a ser pesquisado com o termo do meio da sequência, ou seja, o termo $a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$.
 2. Se x for igual a este termo, retorne a localização deste termo no sequência.
 3. Caso contrário:
 - a) faça uma nova pesquisa binária na primeira metade da sequência original se x for menor que o termo do meio; ou
 - b) faça uma nova pesquisa binária na segunda metade da sequência original se x for maior que o termo do meio; ou
 - c) retorne 0 se não há mais elementos a serem pesquisados.

Expresse a pesquisa binária como um algoritmo recursivo.

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 33 (Continuação)

Solução. Um pseudo-código para um algoritmo recursivo para a função de pesquisa binária é o seguinte.

```
procedure binary search( $i, j, x$ : integers,  $1 \leq i \leq j \leq n$ )  
   $m := \lfloor (i + j)/2 \rfloor$   
  if  $x = a_m$  then  
    return  $m$   
  else if ( $x < a_m$  and  $i < m$ ) then  
    return binary search( $i, m - 1, x$ )  
  else if ( $x > a_m$  and  $j > m$ ) then  
    return binary search( $m + 1, j, x$ )  
  else return 0  
  {output is location of  $x$  in  $a_1, a_2, \dots, a_n$  if it appears; otherwise it is 0}
```

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 33 (Continuação)

Exemplo de execução do algoritmo de pesquisa binária para os valores de entrada

$$i = 1, \quad j = 12, \quad x = 20,$$

na lista ordenada

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 12, \quad a_6 = 15, \\ a_7 = 17, \quad a_8 = 20, \quad a_9 = 23, \quad a_{10} = 25, \quad a_{11} = 28, \quad a_{12} = 30 :$$

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
<code>bin_search(1,12,20)</code>	<code>bin_search(7,12,20)</code>	8
<code>bin_search(7,12,20)</code>	<code>bin_search(7,8,20)</code>	8
<code>bin_search(7,8,20)</code>	<code>bin_search(8,8,20)</code>	8
<code>bin_search(8,8,20)</code>	—	8

Exemplos de algoritmos recursivos

- Exemplo 33 (Continuação)

Exemplo de execução do algoritmo de pesquisa binária para os valores de entrada

$$i = 1, \quad j = 12, \quad x = 7,$$

na lista ordenada

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 12, \quad a_6 = 15, \\ a_7 = 17, \quad a_8 = 20, \quad a_9 = 23, \quad a_{10} = 25, \quad a_{11} = 28, \quad a_{12} = 30 :$$

Função	Chamada recursiva	Valor de retorno
<code>bin_search(1, 12, 7)</code>	<code>bin_search(1, 5, 7)</code>	0
<code>bin_search(1, 5, 7)</code>	<code>bin_search(1, 2, 7)</code>	0
<code>bin_search(1, 2, 7)</code>	<code>bin_search(2, 2, 7)</code>	0
<code>bin_search(2, 2, 7)</code>	—	0



Demonstrando a correção de algoritmos recursivos

- Podemos usar a indução matemática para demonstrar a correção de algoritmos recursivos.
- Exemplo 34 Demonstre que o algoritmo recursivo que provemos em um exemplo anterior para calcular a exponenciação de um número real com expoente inteiro não-negativo está correto.

Solução. Vamos usar indução matemática no expoente n .

Passo base: Se $n = 0$ nosso algoritmo recursivo nos diz que $power(a, 0) = 1$, o que está correto porque $a^0 = 1$ para qualquer número real a .

Demonstrando a correção de algoritmos recursivos

- Exemplo 34 (Continuação)

Passo indutivo: A hipótese de indução é que o algoritmo recursivo computa o valor correto da potência para um inteiro arbitrário, ou seja, que $power(a, k) = a^k$ para qualquer valor real $a \neq 0$ e um inteiro não-negativo arbitrário k .

Temos que mostrar que se a hipótese de indução é verdadeira, então o algoritmo computa a resposta correta para $k + 1$, ou seja, teremos $power(a, k + 1) = a^{k+1}$.

Note que como k é um inteiro positivo, o algoritmo faz $power(a, k + 1) = a \cdot power(a, k)$.

Como pela hipótese de indução temos $power(a, k) = a^k$, concluímos que $power(a, k + 1) = a \cdot a^k = a^{k+1}$, e o algoritmo também está correto para $k + 1$.

